

Rechnen mit Quadratwurzeln

Definition:

Sei $a \in \mathbb{R}_0^+$. Die Quadratwurzel aus a ist diejenige nichtnegative Zahl, deren Quadrat a ergibt.

Man schreibt dafür $\sqrt{a}$ und damit gilt: $(\sqrt{a})^2 = a$.

Beispiel: Gegeben ist ein Rechteck mit der Länge 3 LE und Breite 2 LE



Berechnung des Flächeninhalts des Rechtecks:

$$A = 2 \cdot 3 = 6 \text{ FE}$$

$$A = \sqrt{4} \cdot \sqrt{9} = \sqrt{36} = 6 \text{ FE}$$

Multiplikationsregel:

Für beliebige $a, b \geq 0$ gilt: $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$

Divisionsregel:

Für beliebige $a, b \geq 0$ und $b > 0$ gilt: $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$

Berechnung des Umfangs des Rechtecks:

$$U = 2 + 3 + 2 + 3 = 10 \text{ LE}$$

$$U = \sqrt{4} + \sqrt{9} + \sqrt{4} + \sqrt{9} \neq \sqrt{4+9+4+9} = \sqrt{26} \approx 5,099 \text{ LE}$$

Vorsicht: $\sqrt{a} \pm \sqrt{b} \neq \sqrt{a \pm b}$

Aufgaben:

1 $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8}$ ☐

2 $\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{\frac{3}{2}}$ ☐

3 $\sqrt{\frac{5}{3}} : \sqrt{\frac{80}{3}}$ ☐

4 $\frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{32}}{\sqrt{6}}$ ☒

5 $(\sqrt{8} + \sqrt{2}) \cdot \sqrt{2}$ ☒

6 $(5 \cdot \sqrt{2})^2$ ☒

7 $(7\sqrt{2} + 3\sqrt{5})^2$ ☒

8 $(8\sqrt{5} - 3\sqrt{2})^2$ ☒

9 $\sqrt{5} + 2\sqrt{5}$ ☐

10 $\sqrt{c} - \frac{5}{2}\sqrt{c}$ ☐

11 $3\sqrt{11} + 2\sqrt{11} - 4\sqrt{11}$ ☐

Zusammenhang zwischen Quadrieren und Wurzelziehen:

- Für alle $a \in \mathbb{R}_0^+$ gilt: $(\sqrt{a})^2 = a$
- Für alle $a \in \mathbb{R}$ gilt: $\sqrt{a^2} = |a|$

Lösungen zu den Aufgaben:

$$1 \quad \sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = \sqrt{2 \cdot 8} = \sqrt{16} = 4$$

$$2 \quad \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} = \sqrt{\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2}} = \sqrt{1} = 1$$

$$3 \quad \sqrt{\frac{5}{3}} \cdot \sqrt{\frac{80}{3}} = \sqrt{\frac{5}{3} \cdot \frac{80}{3}} = \sqrt{\frac{5 \cdot 80}{3 \cdot 3}} = \sqrt{\frac{5 \cdot 16 \cdot 5}{3 \cdot 3}} = \sqrt{\frac{16 \cdot 25}{9}} = \sqrt{\frac{16}{9}} = \frac{4}{3}$$

$$4 \quad \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{32}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{96}}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{96}{6}} = \sqrt{16} = 4$$

$$5 \quad (\sqrt{8} + \sqrt{2}) \cdot \sqrt{2} = \sqrt{8} \cdot \sqrt{2} + \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{16} + \sqrt{4} = 4 + 2 = 6$$

$$6 \quad (5 \cdot \sqrt{2})^2 = 5^2 \cdot \sqrt{2}^2 = 25 \cdot 2 = 50$$

$$7 \quad (7\sqrt{2} + 3\sqrt{5})^2 = (7\sqrt{2})^2 + 2 \cdot 7\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{5} + (3\sqrt{5})^2 =$$

$$49 \cdot 2 + 42 \cdot \sqrt{10} + 9 \cdot 5 = 98 + 42\sqrt{10} + 45 = 143 + 42\sqrt{10}$$

$$8 \quad (8\sqrt{5} - 3\sqrt{2})^2 = (8\sqrt{5})^2 - 2 \cdot 8\sqrt{5} \cdot 3\sqrt{2} + (3\sqrt{2})^2 =$$

$$64 \cdot 5 - 48 \cdot \sqrt{10} + 9 \cdot 2 = 320 - 48\sqrt{10} + 18 = 338 - 48\sqrt{10}$$

$$9 \quad \sqrt{5} + 2\sqrt{5} = 3\sqrt{5}$$

$$10 \quad \sqrt{c} - \frac{5}{2}\sqrt{c} = -\frac{3}{2}\sqrt{c}$$

$$11 \quad 3\sqrt{11} + 2\sqrt{11} - 4\sqrt{11} = \sqrt{11}$$

Anwendungen der Rechenregeln

(1) Teilweises Wurzelziehen (teilweises Radizieren)

Beispiel: $\sqrt{200} = \sqrt{100 \cdot 2} = \sqrt{100} \cdot \sqrt{2} = 10 \cdot \sqrt{2}$

Aufgaben:

1 $\sqrt{8}$ ☐

2 $\sqrt{75}$ ☐

Die Variablen in den folgenden Aufgaben stellen positive Zahlen dar.

3 $\sqrt{b^3}$ ☒

4 $\sqrt{a^2b}$ ☒

5 $\sqrt{9x^2 + 16x^2}$ ☒

6 $\sqrt{a^2 + a^3}$ ☒

7 $\sqrt{\frac{5y^2}{4}}$ ☐

8 $\sqrt{\frac{pq}{3r}} : \sqrt{\frac{qr}{27p}}$ ☒

9 $\sqrt{\frac{x^4y^2}{484z^2}}$ ☒

10 $\sqrt{27p^3q^2r}$ ☒

11 $\sqrt{\frac{u^3v}{w^2}}$ ☒

Lösungen zu den Aufgaben:

$$1 \quad \sqrt{8} = \sqrt{4 \cdot 2} = 2\sqrt{2}$$

$$2 \quad \sqrt{75} = \sqrt{25 \cdot 3} = 5\sqrt{3}$$

Die Variablen in den folgenden Aufgaben stellen positive Zahlen dar.

$$3 \quad \sqrt{b^3} = \sqrt{b^2 \cdot b} = b\sqrt{b}$$

$$4 \quad \sqrt{a^2 b} = a\sqrt{b}$$

$$5 \quad \sqrt{9x^2 + 16x^2} = \sqrt{25x^2} = 5x$$

$$6 \quad \sqrt{a^2 + a^3} = \sqrt{a^2(1+a)} = a\sqrt{1+a}$$

$$7 \quad \sqrt{\frac{5y^2}{4}} = \frac{y}{2}\sqrt{5}$$

$$8 \quad \sqrt{\frac{pq}{3r}} : \sqrt{\frac{qr}{27p}} = \sqrt{\frac{pq}{3r} : \frac{qr}{27p}} = \sqrt{\frac{pq}{3r} \cdot \frac{27p}{qr}} = \sqrt{\frac{9p^2}{r^2}} = \frac{3p}{r}$$

$$9 \quad \sqrt{\frac{x^4 y^2}{484 z^2}} = \frac{x^2 y}{22z}$$

$$10 \quad \sqrt{27p^3 q^2 r} = 3pq\sqrt{3pr}$$

$$11 \quad \sqrt{\frac{u^3 v}{w^2}} = \frac{u}{w}\sqrt{uv}$$

(2) Faktor unter die Wurzel ziehen

Beispiel: $5 \cdot \sqrt{3} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{25 \cdot 3} = \sqrt{75}$

Aufgaben:

1 $2\sqrt{2}$ ☐

2 $a\sqrt{2}$ ☐

3 $5 \cdot \sqrt{a+b}$ ☒

4 $\frac{1}{b} \cdot \sqrt{b}$ ☒

Lösungen zu den Aufgaben:

$$1 \quad 2\sqrt{2} = \sqrt{4 \cdot 2} = \sqrt{8}$$

$$2 \quad a\sqrt{2} = \sqrt{a^2 \cdot 2} = \sqrt{2a^2}$$

$$3 \quad 5 \cdot \sqrt{a+b} = \sqrt{25 \cdot (a+b)} = \sqrt{25a+25b}$$

$$4 \quad \frac{1}{b} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{\frac{b}{b^2}} = \sqrt{\frac{1}{b}} = \frac{1}{\sqrt{b}}$$

(3) Rationalmachen des Nenners

Beispiel:

$$\frac{2}{1+\sqrt{3}} \quad \text{Ziel: im Nenner soll eine rationale Zahl stehen}$$

$$\frac{2 \cdot (1-\sqrt{3})}{(1+\sqrt{3}) \cdot (1-\sqrt{3})} = \frac{2-2\sqrt{3}}{1-3} = \frac{2-2\sqrt{3}}{-2} = -1+\sqrt{3}$$

Aufgaben:

1 $\frac{70}{\sqrt{7}}$ ☐

2 $\frac{3}{2\sqrt{5}}$ ☐

3 $\frac{1}{3+\sqrt{2}}$ ☒

4 $\frac{3}{2-\sqrt{3}}$ ☒

5 $\frac{6}{2\sqrt{3}-3}$ ☒

6 $\frac{2\sqrt{5}}{2-\sqrt{5}}$ ☒

Lösungen zu den Aufgaben:

$$1 \quad \frac{70}{\sqrt{7}} = \frac{70 \cdot \sqrt{7}}{\sqrt{7} \cdot \sqrt{7}} = \frac{70 \cdot \sqrt{7}}{7} = 10\sqrt{7}$$

$$2 \quad \frac{3}{2\sqrt{5}} = \frac{3 \cdot \sqrt{5}}{2\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \frac{3 \cdot \sqrt{5}}{2 \cdot 5} = \frac{3 \cdot \sqrt{5}}{10}$$

$$3 \quad \frac{1}{3+\sqrt{2}} = \frac{1 \cdot (3-\sqrt{2})}{(3+\sqrt{2})(3-\sqrt{2})} = \frac{3-\sqrt{2}}{9-2} = \frac{3-\sqrt{2}}{7}$$

$$4 \quad \frac{3}{2-\sqrt{3}} = \frac{3 \cdot (2+\sqrt{3})}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})} = \frac{3 \cdot (2+\sqrt{3})}{4-3} = 3 \cdot (2+\sqrt{3}) = 6+3\sqrt{3}$$

$$5 \quad \frac{6}{2\sqrt{3}-3} = \frac{6 \cdot (2\sqrt{3}+3)}{(2\sqrt{3}-3)(2\sqrt{3}+3)} = \frac{6 \cdot (2\sqrt{3}+3)}{12-9} = \frac{6 \cdot (2\sqrt{3}+3)}{3} = 2 \cdot (2\sqrt{3}+3) = 4\sqrt{3}+6$$

$$6 \quad \frac{2\sqrt{5}}{2-\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5} \cdot (2+\sqrt{5})}{(2-\sqrt{5})(2+\sqrt{5})} = \frac{2\sqrt{5} \cdot (2+\sqrt{5})}{4-5} = \frac{2\sqrt{5} \cdot (2+\sqrt{5})}{-1} = -4\sqrt{5}-10$$